ECOLE NAVALE

Concours 1978

Première composition de mathématiques

On donne l'équation différentielle E_n :

$$(x^2 + 1)\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} - 4n^2y = 0$$

où n est un entier naturel et y une application deux fois dérivable de l'ensemble des nombres réels vers lui-même.

1° Intégrer E_0.

Dans tout ce qui suit, *n* est supposé non nul.

2° On cherche une solution de E_n développable en série entière de x ; on trouve comme solutions particulières de E_n : un polynôme $P_n(x)$ et une série entière de somme $S_n(x)$, le coefficient du terme de plus bas degré de chacune de ces expressions étant pris égal à 1 (un).

3° Expliciter, sous la forme la plus condensée possible, les coefficients de $P_n(x)$. Ce polynôme étant ordonné, par exemple selon les puissances croissantes, montrer que la suite de ses coefficients est d'abord croissante, puis décroissante pour $n > 2$. Quel est le plus grand coefficient lorsque n vaut 10?

4° Expliciter le terme général de la série entière de somme $S_n(x)$; quel est le domaine de convergence?

5° On effectue sur E_n le changement de variable défini par : $x = sht$.

Intégrer l'équation différentielle ainsi obtenue. En déduire de nouvelles expressions de $P_n(x)$ et de $S_n(x)$.

6° Indépendamment des calculs précédents, montrer que $ch\,[2n.\mathrm{Log}(x + \sqrt{x^2 + 1})]$ est un polynôme en x (Log désigne le logarithme népérien). Déduire de ce qui précède une expression plus simple de :

$$A_q = \sum_{p=q}^{p=n} C_{2n}^{2p} \cdot C_p^q \quad , \quad q \text{ fixé}, \quad 0 \leqslant q \leqslant n.$$

7° Déterminer les solutions de l'équation : $P_n(x) = 0$; vérifier que les solutions trouvées sont deux à deux imaginaires conjuguées.

8° On note V l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et f_n l'application de V vers V qui, à tout polynôme $Q(x)$ de V, associe le polynôme :

$$f_n(Q) = (x^2 + 1)\frac{d^2Q(x)}{dx^2} + x\frac{dQ(x)}{dx} - 4n^2Q(x)$$

a. Montrer que f_n est un endomorphisme de V. Quel est le degré de $f_n(Q)$, selon le degré de Q? f_n est-elle surjective? f_n est-elle injective? Quelles sont les valeurs propres de f_n? Quelle est la dimension des espaces propres associés?

b. Soit V^p le sous-espace de V formé des polynômes de degré inférieur ou égal à p. Pour n fixé, quelle est la plus grande valeur possible de p pour que la restriction g^p de f_n à V^p soit un automorphisme de V^p?

c. Dans ce qui suit, on prend n égal à 2 et p égal à la valeur maximale définie dans la question précédente. Déterminer la matrice A de g^p dans la base $(1, x, \ldots, x^p)$ de V^p. Déterminer par récurrence l'expression de A^k pour k entier positif, puis pour k entier négatif.

d. Déterminer une base de V^p formée de vecteurs propres de g^p. Effectuer sur ces polynômes le changement de variable défini par $x = sht$.

-FIN-

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail